Fiche théorique : Les équations logarithmiques complexes

Exercice introductif

Parmi les assertions ci-dessous, lesquelles sont correctes ?

	Vrai	Faux
$log_2(4) + log_2(2) = log_2(6)$		
$log_2(4) + log_2(2) = log_2(8)$		
$log_3(27) - log_3(9) = log_3(18)$		
$log_3(27) - log_3(9) = log_3(3)$		
$log_2(32) - log_2(8) = log_2(4)$		
$log_2(32) - log_2(8) = log_2(24)$		
$2 \cdot log_2(4) = log_2(8)$		
$2 \cdot log_2(4) = log_2(4^2)$		

Remarques

Cet exercice introductif nous permet d'affirmer que trois règles, qui pourraient peut-être paraitre logique, sont fausses.

$$\boldsymbol{log_b(x) + log_b(y) \neq log_b(x+y)}$$

$$\boldsymbol{log_b(x) - log_b(y) \neq log_b(x-y)}$$

$$\boldsymbol{n \cdot log_b(x) \neq log_b(n \cdot x) \quad , n \in R}$$

Nous pouvons néanmoins remarquer que les logarithmes semblent vérifier certaines propriétés.

$$\boldsymbol{log_b(x) + log_b(y) = log_b(x \cdot y)}$$

$$\boldsymbol{log_b(x) - log_b(y) = log_b\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$$\boldsymbol{n \cdot log_b(x) = log_b(x^n) \quad , n \in R}$$

L'utilisation de ces propriétés peut s'avérer utile et nécessaire pour résoudre certains types d'équations.

Prenons comme exemple l'équation $log_2(x+3) + log_2(x-1) = 5$.

Le fait que cette équation comporte deux logarithmes complexifie la résolution de cette équation. Néanmoins, l'utilisation de la première propriété des logarithmes nous permet de rassembler ces deux termes, afin d'obtenir une équation ne comptant qu'un seul logarithme.

$$log_2(x+3) + log_2(x-1) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad log_2[(x+3)(x-1)] = 5$$

Nous pouvons utiliser la définition du logarithme sur l'équation obtenue.

Plus précisément,

$$\boldsymbol{log_2[(x+3)(x-1)] = 5}$$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Remarques

Nous rappelons qu'un logarithme de la forme $\boldsymbol{log_b(a)}$ est défini si $\boldsymbol{a > 0}$. Il est ainsi essentiel de valider nos solutions potentielles en s'assurant que, avec de telles valeurs, nos logarithmes sont définis.

Ainsi, nous pouvons en conclure que l'ensemble de solution de notre équation est donné par :

$$S = \{ \quad \}$$