Fiche théorique : Les logarithmes

Comment pourrions-nous résoudre les équations suivantes ?

$A)\ \ 10^x = 1000$ $\qquad$ $B)\ \ 10^x = 0{,}01$

$C)\ \ 10^x = 316'227'766$ $\qquad$ $D)\ \ 10^x = 0{,}25$

Pour les deux premières équations, l'utilisation de nos connaissances en notation scientifique, et plus précisément au niveau des puissances de dix, peut s'avérer efficace. En revanche, les deux questions suivantes sont plus complexes et la recherche de l'inconnue peut représenter une tâche plus difficile à exécuter.

Un outil mathématique, appelé logarithme et dont les calculatrices sont dotées, permet de déterminer la valeur à laquelle il faut élever le nombre 10 pour obtenir une valeur souhaitée.

Définition du logarithme en base 10
Le logarithme en base $\mathbf{10}$ d'un nombre (réel strictement positif) $\boldsymbol{a}$**,** est la puissance à laquelle il faut élever le nombre $\mathbf{10}$ pour obtenir $\boldsymbol{a}$. Nous le notons $\boldsymbol{log(a)}$.

Exemples

Soit une équation de la forme $\mathbf{10^x = 316'227'766}$ à résoudre.

Alors $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{log}(\mathbf{316'227'766}) = \mathbf{8.5}$

Soit une équation de la forme $\mathbf{10^x = 0,25}$ à résoudre.

Alors $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{log}(\mathbf{0,25}) \cong \mathbf{-0,6}$

Dans un même ordre d'idée, nous pourrions nous questionner sur la manière de résoudre des équations de la forme suivante :

$A)\ \ 3^x = 81$ $\qquad$ $B)\ \ 11^x = 1331$

$C)\ \ 4^x = 32$ $\qquad$ $D)\ \ 2^x = 16'777'216$

Comme précédemment, les deux premières questions peuvent être résolues par un calcul mental ou par un raisonnement par tâtonnement. En revanche, de telles méthodes peuvent s'avérer moins efficaces pour résoudre les deux équations suivantes.

Définition du logarithme en base b
Le logarithme en base $\boldsymbol{b}$ d'un nombre (réel strictement positif) $\boldsymbol{a}$, est la puissance à laquelle il faut élever le nombre $\boldsymbol{b}$ pour obtenir $\boldsymbol{a}$. Nous le notons $\boldsymbol{log_b(a)}$.

Certaines calculatrices sont dotées d'une telle fonction et permettent de calculer des logarithmes avec une base différente de 10.

Ainsi, pour résoudre une équation de la forme $\boldsymbol{4^x = 32}$, il suffit d'utiliser un logarithme en base 4 et nous pouvons en déduire que $\boldsymbol{x = log_4(32)} =$

Pour les calculatrices qui ne seraient pas dotées d'un tel outil, un changement de base s'impose.

Formule du changement de base
Pour calculer le logarithme de base $\boldsymbol{b}$ d'un nombre (réel strictement positif) $\boldsymbol{b}$, nous pouvons utiliser la formule suivante : $$\boldsymbol{log_b(a) = \frac{log(a)}{log(b)}}$$

<u>Exemple</u>

Soit une équation de la forme $\boldsymbol{2^x = 16'777'216}$ à résoudre.

Alors $\boldsymbol{x = log_2(16'777'216) = 24}$ ou d'une manière équivalente $\boldsymbol{x = \frac{log(16'777'216)}{log(2)} = 24}$

<u>Exemples</u> (mobilisant l'utilisation des logarithmes)

$\boldsymbol{A)}$ $\boldsymbol{(1 + 3 \cdot 5)^x = 8}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{16^x = 8}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x = log_{16}(8)}$

$S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

$\boldsymbol{B)}$ $\boldsymbol{\frac{8^x + 1}{5} + 3 = 4}$ $\quad \boldsymbol{-3}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\frac{8^x + 1}{5} = 1}$ $\quad \boldsymbol{\cdot 5}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{8^x + 1 = 5}$ $\quad \boldsymbol{-1}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{8^x = 4}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x = log_8(4)}$

$S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$