Fiche théorique : Les systèmes d'inéquations

Exercice introductif

Tentez de résoudre, en trois minutes, le système d'inéquations ci-dessous.

$$\begin{cases} 2x + 3 \leq 11 \\ 2 - 3x < 8 \end{cases}$$

Remarque

Trouver les solutions d'un système d'inéquations à une inconnue, c'est déterminer l'ensemble des valeurs que nous pouvons attribuer à l'inconnue pour que toutes les inéquations qui composent le système soient vérifiées.

En prenant l'exemple précédent et en s'intéressant, dans un premier temps à la première inéquation, nous pouvons remarquer que l'inégalité est satisfaite pour toutes les valeurs de x prises dans l'intervalle $]-\infty\,; 4]$.

En effet, en simplifiant cette inéquation, nous pouvons observer les équivalences suivantes :

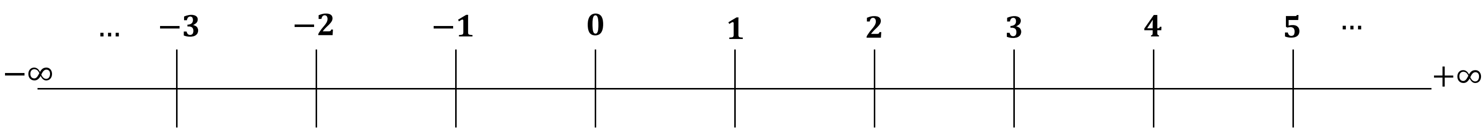
$$\mathbf{2x + 3 \leq 11} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{2x \leq 8} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{x \leq 4}$$

D'une manière similaire, l'ensemble des solutions de la seconde inéquation composant le système précédent est donné par $]2\,;\ +\infty[$. Ce résultat peut être obtenu en simplifiant cette inéquation à l'aide des règles d'équivalence étudiées :

$$\mathbf{2 - 3x < 8} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{-3x < 6} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{x > 2}$$

Nous pouvons en conclure que l'ensemble des solutions de notre système d'inéquations est l'ensemble des valeurs appartenant simultanément à l'intervalle $]-\infty\,; 4]$ et à l'intervalle $]2\,;\ +\infty[$.

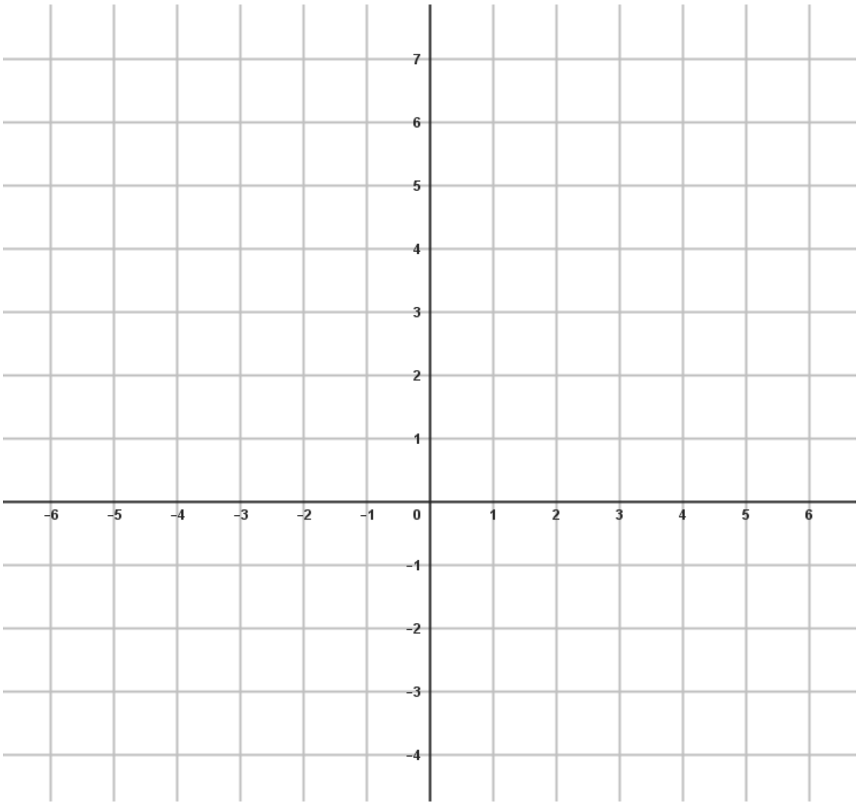
L'intersection entre ces deux ensembles est l'intervalle $]2\,; 4]$ et ce résultat peut également s'observer à l'aide d'un raisonnement graphique :



Exercice introductif

Tentez de résoudre graphiquement le système d'inéquations ci-dessous.

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq x - 2 \\ y + 2x \leq 7 \end{cases}$$



La première inéquation nous permet d'éliminer l'ensemble des couples $(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{y})$ dont la première coordonnée est strictement inférieure à 1. Nous pouvons ainsi tracer une droite vertical en $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ et hachurer la zone se trouvant à gauche de cette droite.

La seconde inéquation réduit davantage la zone des couples vérifiant notre système d'inéquations, puisqu'en traçant la droite $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \mathbf{2},$ nous pouvons éliminer la partie contenant les couples $(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{y})$ ne satisfaisant pas la condition $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x} - \mathbf{2}$.

Nous pouvons utiliser la troisième condition pour conclure ce problème. A noter qu'il est préférable d'utiliser l'inéquation équivalente $\boldsymbol{y} \leq -\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{7}$ permettant de tracer aisément la droite $\boldsymbol{y} = -\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{7}$ et éliminer la partie composée des couples $(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{y})$ ne vérifiant pas cette condition équivalente à l'inéquation initiale.

La zone blanche restante représente ainsi l'ensemble des solutions de notre système d'inéquations. Par exemple, nous pouvons constater sans réelles difficultés que les coordonnées des points ci-dessous vérifient nos trois conditions composant notre système d'inéquations.

$\boldsymbol{P_1} = (\mathbf{2}; \mathbf{1})$ $\qquad$ $\boldsymbol{P_2} = \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}; \mathbf{3}\right)$ $\qquad$ $\boldsymbol{P_3} = (\mathbf{1}; \mathbf{4})$