Fiche théorique : Les inéquations (Partie 2)

Définition
Une inéquation est une inégalité entre deux expressions algébriques et incluant une ou plusieurs variables.

Remarque

Un nombre est une solution d'une inéquation à une variable, si en remplaçant la variable par ce nombre, l'inégalité est satisfaite. En règle générale, l'ensemble des solutions d'une inéquation est donné sous la forme d'un intervalle.

Exemple

$\boldsymbol{x^2+2x-8 \leq 0}$ est une inéquation dont l'ensemble des solutions est $[-4\,;2]$.

Comment pouvons-nous déterminer cet ensemble ? Telle est la question !

Une technique consiste à factoriser l'expression $\boldsymbol{x^2+2x-8}$ et étudier le signe de chaque facteur en fonction de différentes valeurs que l'on pourrait attribuer à la variable **x**.

Par exemple, avec la quatrième identité remarquable, nous pouvons affirmer que :

$$\boldsymbol{x^2+2x-8 \leq 0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{(x+4)(x-2) \leq 0}$$

Un tableau des signes peut être réalisé, afin de synthétiser les propos tenus précédemment.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$\boldsymbol{-4}$		$\boldsymbol{2}$		$+\infty$
$\boldsymbol{x+4}$		$-$	$\boldsymbol{0}$	$+$	$+$	$+$	
$\boldsymbol{x-2}$		$-$	$-$	$-$	$\boldsymbol{0}$	$+$	
$\boldsymbol{(x+4)(x-2)}$		$+$	$\boldsymbol{0}$	$-$	$\boldsymbol{0}$	$+$	

Nous pouvons remarquer que notre expression finale est bel et bien inférieure ou égale à 0 lorsque la variable **x** prend une valeur située dans l'intervalle $[-4\,;2]$.

Exemple

Utilisons le même procédé que précédemment, afin de résoudre l'inéquation ci-dessous :

$$\frac{x^2+7x+10}{x+3} > 0$$

Nous pouvons observer attentivement l'expression se trouvant à gauche du signe de l'inégalité et remarquer que le numérateur peut se factoriser à l'aide de la quatrième identité remarquable. Nous pouvons écrire cette inéquation ainsi :

$$\frac{(x+5)(x+2)}{x+3} > 0$$

Pour déterminer les solutions de cette inéquation, nous pouvons utiliser un tableau des signes en y intégrant chaque expression composant la partie située à gauche du signe de l'inégalité.

x	$-\infty$		-5		-3		-2		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x+2$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\frac{(x+5)(x+2)}{x+3}$		$-$	0	$+$	🚫	$-$	0	$+$	

Nous pouvons en déduire l'ensemble des solutions de notre inéquation, noté :

$$S =]-5;-3[\cup]-2;+\infty[$$

Remarque

La variable x ne peut pas prendre la valeur -3, car dans ce cas, une division par 0 interviendrait.