

Fiche théorique : Les inéquations (Partie 2)

Définition

Une inéquation est une inégalité entre deux expressions algébriques et incluant une ou plusieurs variables.

Remarque

Un nombre est une solution d'une inéquation à une variable, si en remplaçant la variable par ce nombre, l'inégalité est satisfaite. En règle générale, l'ensemble des solutions d'une inéquation est donné sous la forme d'un intervalle.

Exemple

$x^2 + 2x - 8 \leq 0$ est une inéquation dont l'ensemble des solutions est $[-4 ; 2]$.

Comment pouvons-nous déterminer cet ensemble ? Telle est la question !

Une technique consiste à factoriser l'expression $x^2 + 2x - 8$ et étudier le signe de chaque facteur en fonction de différentes valeurs que l'on pourrait attribuer à la variable x .

Par exemple, avec la quatrième identité remarquable, nous pouvons affirmer que :

$$x^2 + 2x - 8 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 4)(x - 2) \leq 0$$

Un tableau des signes peut être réalisé, afin de synthétiser les propos tenus précédemment.

x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$
$x + 4$		$-$	0	$+$	$+$
$x - 2$		$-$	$-$	0	$+$
$(x + 4)(x - 2)$					

Nous pouvons remarquer que notre expression finale est bel et bien inférieure ou égale à 0 lorsque la variable x prend une valeur située dans l'intervalle $[-4 ; 2]$.

Exemple

Utilisons le même procédé que précédemment, afin de résoudre l'inéquation ci-dessous :

$$\frac{x^2 + 7x + 10}{x + 3} > 0$$

Nous pouvons observer attentivement l'expression se trouvant à gauche du signe de l'inégalité et remarquer que le numérateur peut se factoriser à l'aide de la quatrième identité remarquable. Nous pouvons écrire cette inéquation ainsi :

$$\frac{(x + 5)(x + 2)}{x + 3} > 0$$

Pour déterminer les solutions de cette inéquation, nous pouvons utiliser un tableau des signes en y intégrant chaque expression composant la partie située à gauche du signe de l'inégalité.

x	$-\infty$	-5	-3	-2	$+\infty$
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x + 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 3$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{(x + 5)(x + 2)}{x + 3}$					

Nous pouvons en déduire l'ensemble des solutions de notre inéquation, noté :

$$S =$$

Remarque

La variable x ne peut pas prendre la valeur -3 , car dans ce cas, une division par 0 interviendrait.