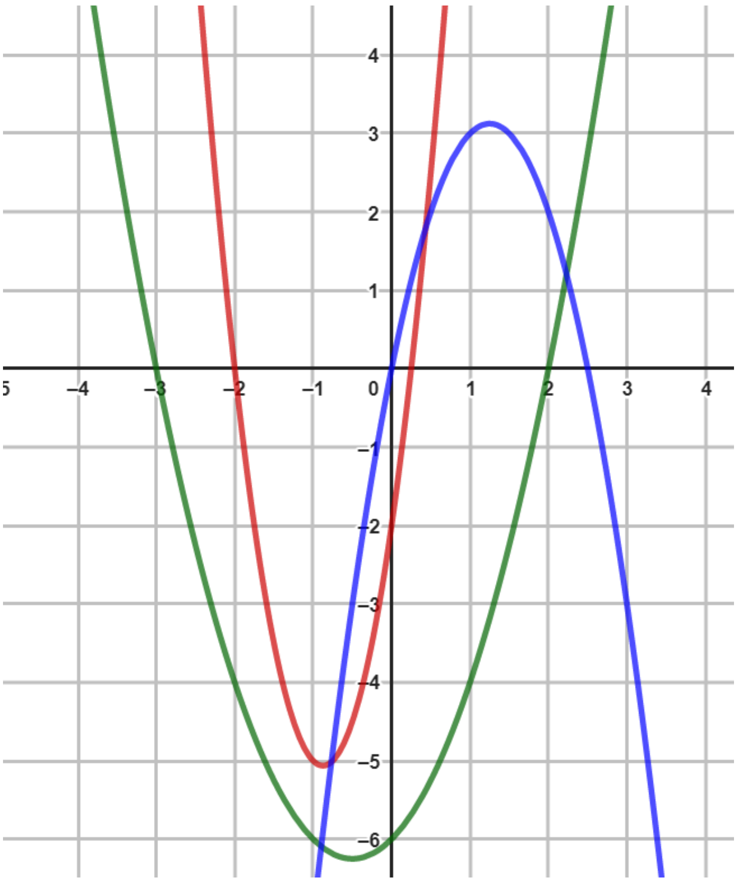
Fiche théorique : Les fonctions du deuxième degré

Exercice introductif

Complétez le tableau des valeurs ci-dessous.

x	$f(x) = (x-2)(x+3)$	$g(x) = -2x^2 + 5x$	$h(x) = 4x^2 + 7x - 2$
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			

Quelles fonctions ci-dessus pourraient convenir aux représentations graphiques suivantes ?



Fonctions quadratiques
Une fonction du deuxième degré, appelée aussi fonction quadratique, est de la forme $$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$$ où ***a, b*** et ***c*** sont des nombres réels quelconques, avec ***a*** différent de zéro.

<u>Remarques</u>

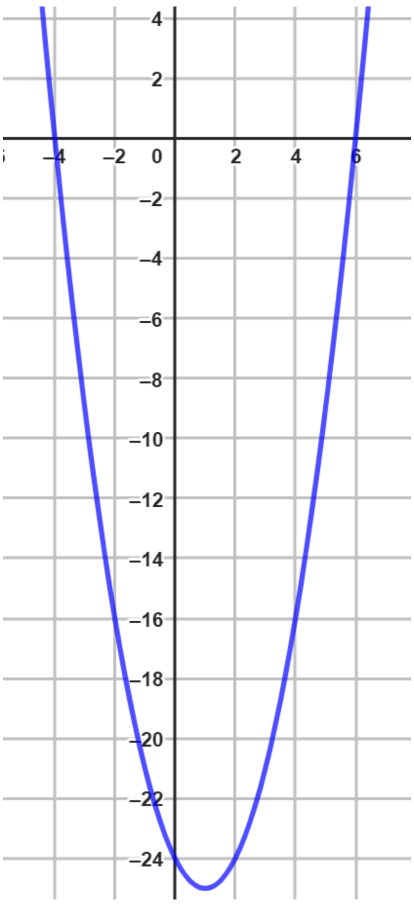
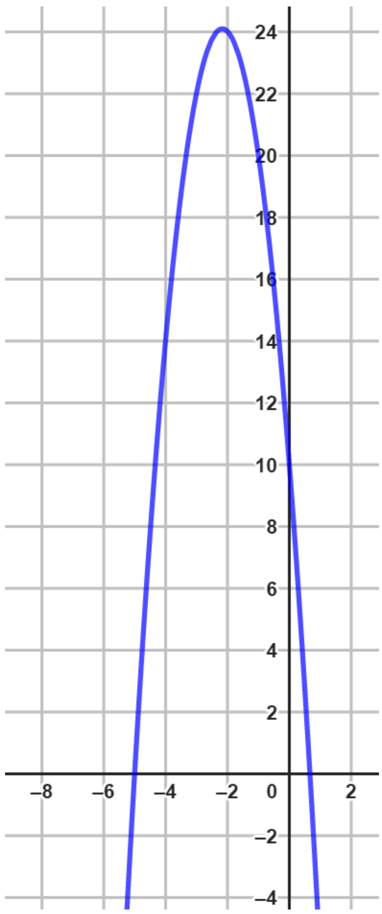
Une fonction quadratique est représentée graphiquement par une parabole.

Le nombre **c** indique la valeur en laquelle la parabole coupe l'axe des ordonnées.

La valeur absolue du nombre ***a*** donne des informations sur l'ouverture de la parabole. Plus cette valeur est importante, plus la parabole sera resserrée vers l'axe des ordonnées.

Le signe du nombre ***a*** indique le sens de la parabole. La fonction est dite convexe, si le signe de ***a*** est positif et admet, sous ces conditions, un minimum. En revanche, elle est dite concave, si le signe est négatif et la fonction possède ainsi un maximum.

L'ensemble de ces faits peuvent s'observer à l'aide des représentations graphiques précédentes et les deux fonctions quadratiques tracées ci-dessous :

$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 24}$	$\boldsymbol{g(x) = -3x^2 - 13x + 10}$
	

Zéros d'une fonction
Les zéros d'une fonction $\boldsymbol{f}$ sont les valeurs qu'il faut donner à la variable $\boldsymbol{x}$ pour que la fonction s'annule. Déterminer les zéros d'une fonction revient ainsi à résoudre l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

Remarque

Les zéros d'une fonction quadratique sont les valeurs en laquelle la parabole représentant cette fonction intersecte l'axe des abscisses.

Exemple

La fonction $\boldsymbol{f}$, définie par $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 24}$ et représentée graphiquement sur la page précédente, coupe l'axe des abscisses en $\boldsymbol{-4}$ et $\boldsymbol{6}$ puisque :

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{f(x) = 0} \\
\Leftrightarrow \quad & \boldsymbol{x^2 - 2x - 24 = 0} \\
\Leftrightarrow \quad & \boldsymbol{(x-6)(x+4) = 0}
\end{aligned}
$$

Exemple

En observant la fonction $\boldsymbol{g}$ de la page précédente, définie par $\boldsymbol{g(x) = -3x^2 - 13x + 10}$, nous pouvons remarquer qu'il est difficile d'identifier avec précision les zéros de cette fonction en utilisant le graphique à disposition. L'algèbre nous permet d'obtenir ces informations grâce à la résolution de l'équation $\boldsymbol{-3x^2 - 13x + 10 = 0}$

Avec $\boldsymbol{a = -3}$, $\boldsymbol{b = -13}$ et $\boldsymbol{c = 10}$, le discriminant est égal à $\Delta = \boldsymbol{(-13)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 10 = 289}$

Ainsi, notre équation possède deux solutions distinctes données par :

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-(-13) + \sqrt{289}}{2 \cdot (-3)} = \quad -5} \qquad \boldsymbol{x_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{289}}{2 \cdot (-3)} = \quad \frac{2}{3}}$$

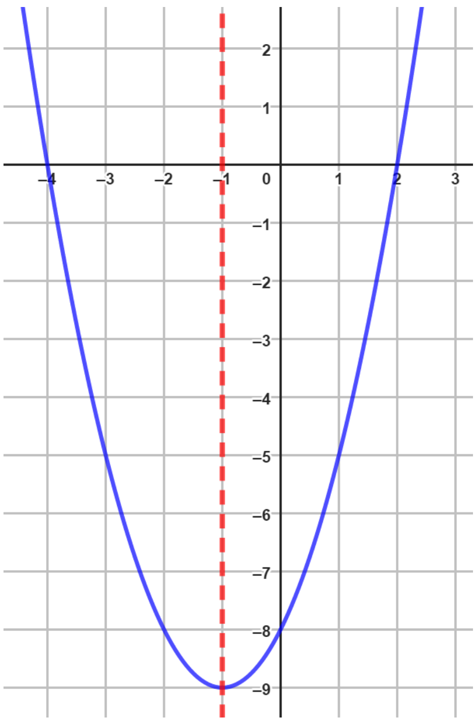
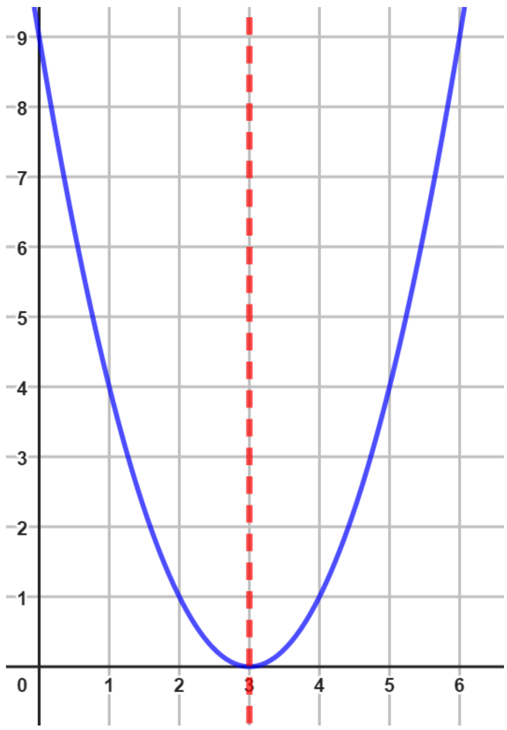
Nous pouvons en conclure que les zéros sont $\boldsymbol{-5}$ et $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$.

Axe de symétrie d'une parabole
L'axe de symétrie d'une parabole est une droite verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) et passant par le sommet de la parabole.

<u>Remarques</u>

L'axe de symétrie passe par le milieu des deux zéros d'une fonction quadratique, si ceux-ci existent.

L'axe de symétrie passe par le zéro d'une fonction quadratique, si celle-ci ne possède qu'un unique zéro.

$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x - 8}$	$\boldsymbol{g(x) = x^2 - 6x + 9}$
	

L'axe de symétrie est la droite définie par $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$

Pour la fonction $\boldsymbol{f}$ ci-dessous, l'axe de symétrie est $\boldsymbol{x = -\frac{2}{2 \cdot 1}}$ équivalent après simplification à $\boldsymbol{x = -1}$ et correspondant parfaitement à la droite verticale représentée graphiquement.

Pour la fonction $\boldsymbol{g}$, le même procédé peut être appliqué en définissant l'axe de symétrie par la droite verticale définie par $\boldsymbol{x = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1}}$ dont l'écriture simplifiée est $\boldsymbol{x = 3.}$ Cette droite représente bien la droite verticale représentée graphiquement en traitillé.

Sommet d'une parabole
Le sommet d'une parabole est le point où la parabole atteint, soit son maximum, soit son minimum.

<u>Remarques</u>

Toute parabole possède un sommet et ce point est unique. Le sommet se situe ainsi sur l'axe de symétrie.

Par conséquent, l'abscisse $\boldsymbol{x_S}$ du sommet d'une parabole est donnée par :

$$\boldsymbol{x_S = -\frac{b}{2a}}$$

Pour déterminer l'ordonnée $\boldsymbol{y_S}$ du sommet d'une parabole, il suffit de calculer l'image de son abscisse.

<u>Exemple</u>

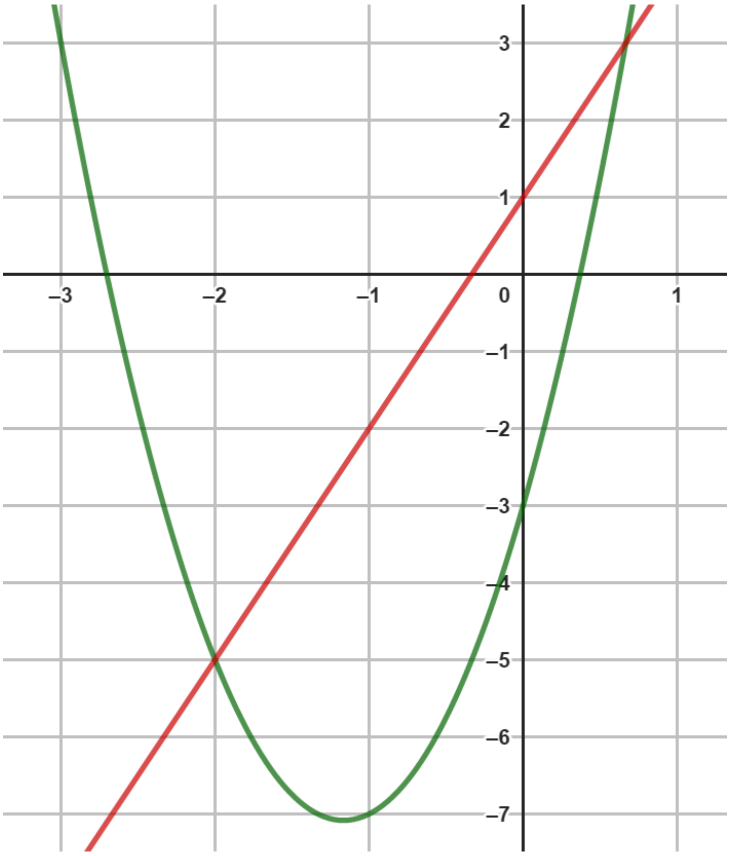
Quel est le sommet de la parabole représentant graphiquement la fonction définie par l'expression fonctionnelle $\boldsymbol{f(x) = 4x^2 - 4x + 1}$?

Point d'intersection entre deux objets
Un point $(\boldsymbol{x_0}\,;\boldsymbol{y_0})$ représente le point d'intersection entre deux droites, si les coordonnées de ce point vérifient les équations des deux objets.

Exemple

Nous avons tracé, sur le repère ci-dessous, une droite et une parabole qui sont définies par les équations suivantes :

$$\boldsymbol{d :\; y = 3x + 1} \qquad\qquad \boldsymbol{p :\; y = 3x^2 + 7x - 3}$$



Remarque

Les deux objets ci-dessus se coupent en deux points. Une estimation plus ou moins précise de ces deux points d'intersection est possible en se basant sur le graphique, mais comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises, l'algèbre représente un outil plus intéressant pour obtenir, avec certitude, l'ensemble des coordonnées de ces points de croisement.

Nous rappelons qu'un point d'intersection entre deux objets est un point vérifiant les équations des deux objets. Ainsi, pour déterminer les points d'intersection entre la droite et la parabole qui sont définies ci-dessus, nous devons résoudre le système composé des équations de ces deux objets.

Plus précisément, le système ci-dessous peut se résoudre par substitution :

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = 3x + 1} \quad (\boldsymbol{d}) \\ \boldsymbol{y = 3x^2 + 7x - 3} \quad (\boldsymbol{p}) \end{cases}$$

Attention, les solutions ci-dessous représentent les abscisses des deux points d'intersection. Nous devons calculer, pour chaque valeur, les ordonnées correspondantes.

$\boldsymbol{y_1} =$

$\boldsymbol{y_2} =$

Nous pouvons en déduire que les points de croisement entre ces deux objets sont les points :

(_______ ; _______) (_______ ; _______)

Nous pouvons vérifier la cohérence de notre résultat en observant le graphique se trouvant à la page précédente.