Fiche théorique : La 4e identité remarquable

La 4e identité remarquable
Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux nombres réels quelconques. L'égalité suivante est vraie : $$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{ab}$$

Preuve

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{ab}\\ &= \boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{ab}\end{aligned}$$

Remarque

L'expression $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$ est dite factorisée, alors que l'expression $\boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{ab}$ représente la forme développée.

Exemples

L'expression factorisée $(x+3)(x+4)$ est équivalente à l'expression développée de la forme $x^2+7x+12$.

L'expression factorisée $(x-2)(x+5)$ est équivalente à l'expression développée de la forme $x^2+3x-10$.

Développer une expression, à l'aide de la double distributivité par exemple, n'est pas un exercice qui présente de réelles difficultés.

A l'inverse, factoriser une expression du 2e degré peut représenter une tâche plus ardue. Tentons d'utiliser ainsi la 4e identité remarquable pour factoriser l'expression :

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{8x} + \boldsymbol{15}$$

En comparant celle-ci avec l'expression développée de la 4e identité remarquable définie par :

$$\boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{ab}$$

Nous observons que la 4e identité remarquable nous demande de déterminer deux nombres ***a*** et ***b*** tels que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{8}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{15}\end{cases}$$

En raisonnant par tâtonnement, nous pouvons déterminer les valeurs des coefficients ***a*** et ***b* :**

Les nombres 3 et 5 vérifient les deux conditions précédentes.

Nous pouvons en conclure que l'expression $\boldsymbol{x^2+8x+15}$ est équivalente à $\boldsymbol{(x+5)(x+3)}$.

Cette affirmation se vérifie en utilisant la double distributivité :

$$\begin{aligned}(x+5)(x+3) &= x^2+5x+3x+15\\ &= x^2+8x+15\end{aligned}$$

<u>Exemple</u>

Pour factoriser l'expression $\boldsymbol{x^2+9x+18}$, nous pouvons comparer celle-ci avec la forme développée de la 4e identité remarquable définie par $\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab}$.

Nous devons ainsi déterminer la valeurs des coefficients ***a*** et ***b*** respectant les conditions ci-dessous :

$$\begin{cases} a+b=9 \\ a\cdot b=18 \end{cases}$$

Ces nombres sont 3 et 6.

Nous pouvons en déduire que l'expression développée $\boldsymbol{x^2+9x+18}$ est équivalente à l'expression factorisée ci-dessous :

$$(x+3)(x+6)$$

A l'aide de cette factorisation, la résolution de l'équation $\boldsymbol{x^2+9x+18=0}$, par exemple, devient une tâche aisée.

$$x^2+9x+18=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+6)=0$$

Le théorème du produit nul nous permet d'identifier deux possibilités (solutions) :

$$\begin{aligned} &x+3=0 \qquad && x+6=0\\ \Leftrightarrow\ &x=-3 \qquad \Leftrightarrow\ && x=-6\end{aligned}$$

Remarques

Les trois premières identités remarquables sont des cas particuliers de la quatrième identité remarquable.

Prenons l'expression $\boldsymbol{x^2+4x+4}$ qui se factorise, en utilisant la première identité remarquable, en $\boldsymbol{(x+2)^2}$.

Un résultat similaire peut être obtenu en utilisant la quatrième identité remarquable.

En effet, nous devons déterminer les valeurs des coefficients ***a*** et ***b*** telles que :

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a\cdot b=4 \end{cases}$$

Les nombres 2 et 2 vérifient ces deux conditions.

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{x^2+4x+4}=\boldsymbol{(x+2)(x+2)=(x+2)^2}$.

Prenons un second exemple avec l'expression $\boldsymbol{x^2-9}$ qui se factorise, par la troisième identité remarquable, en $\boldsymbol{(x+3)(x-3)}$. La quatrième identité remarquable permet d'obtenir le même résultat.

En effet, l'expression $\boldsymbol{x^2-9}$ est équivalente à $\boldsymbol{x^2+0x-9}$ et nous devons ainsi déterminer les valeurs des coefficients ***a*** et ***b*** telles que :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a\cdot b=-9 \end{cases}$$

Les nombres -3 et 3 vérifient ces deux conditions.

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{x^2-9}=\boldsymbol{(x-3)(x+3)}$