Les corrections détaillées :

Exercice 1

Question A

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\boldsymbol{x}-\mathbf{5})$ est égale à 0 si :

$$\boldsymbol{x}+\mathbf{2}=\mathbf{0} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{x}-\mathbf{5}=\mathbf{0}$$

Ainsi, notre équation initiale possède deux solutions distinctes :

$$\begin{array}{rl|l} & \boldsymbol{x}+\mathbf{2}=\mathbf{0} & -\mathbf{2} \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{x}=-\mathbf{2} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl|l} & \boldsymbol{x}-\mathbf{5}=\mathbf{0} & +\mathbf{5} \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{x}=\mathbf{5} & \end{array}$$

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S}=\{-\mathbf{2}\,;\mathbf{5}\}$

Question B

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})$ est égale à 0 si :

$$\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{x}+\mathbf{4}=\mathbf{0}$$

Ainsi, notre équation initiale possède deux solutions distinctes :

$$\begin{array}{l|} \boldsymbol{x}=\mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{rl|l} & \boldsymbol{x}+\mathbf{4}=\mathbf{0} & -\mathbf{4} \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{x}=-\mathbf{4} & \end{array}$$

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S}=\{-\mathbf{4}\,;\mathbf{0}\}$

Question C

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $\mathbf{2x^2(x+3)}$ est égale à 0 si :

$$\mathbf{2x^2 = 0} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{x+3=0}$$

Ainsi, notre équation initiale possède deux solutions distinctes :

$$\begin{array}{rl|l}
 & \mathbf{2x^2 = 0} & \color{red}{\mathbf{:2}} \\
\Leftrightarrow & \mathbf{x^2 = 0} & \color{red}{\sqrt{}} \\
\Leftrightarrow & \mathbf{x = 0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl|l}
 & \mathbf{x+3=0} & \color{red}{\mathbf{-3}} \\
\Leftrightarrow & \mathbf{x=-3} & \\
 & &
\end{array}$$

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{-3\,;0}\}$

Question D

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $\mathbf{3(2x-1)}$ est égale à 0 si :

$$\mathbf{3=0} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{2x-1=0}$$

Bien évidemment, la première égalité ne peut jamais être respectée. Notre équation initiale possède ainsi une seule solution fournie par le second facteur :

$$\begin{array}{rl|l}
 & \mathbf{2x-1=0} & \color{red}{\mathbf{+1}} \\
\Leftrightarrow & \mathbf{2x=1} & \color{red}{\mathbf{:2}} \\
\Leftrightarrow & \mathbf{x=\frac{1}{2}} &
\end{array}$$

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S} = \left\{\mathbf{\frac{1}{2}}\right\}$

Exercice 2

Question A

L'expression $\boldsymbol{x^2 - 3x}$ peut se factoriser, à l'aide de la mise en évidence, en $\boldsymbol{x(x+2)}$

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $\boldsymbol{x(x-3)}$ est égale à 0 si :

$\boldsymbol{x = 0}$ ou $\boldsymbol{x - 3 = 0}$

Ainsi, notre équation initiale possède deux solutions distinctes :

$\boldsymbol{x = 0}$		$\boldsymbol{x - 3 = 0}$	$\boldsymbol{+3}$
		$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = 3}$	

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{0}\,;\boldsymbol{3}\}$

Question B

L'expression $\boldsymbol{x^2 - 4x - 5}$ peut se factoriser, à l'aide de la quatrième identité remarquable, en $\boldsymbol{(x+1)(x-5)}$

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $\boldsymbol{(x+1)(x-5)}$ est égale à 0 si :

$\boldsymbol{x + 1 = 0}$ ou $\boldsymbol{x - 5 = 0}$

Ainsi, notre équation initiale possède deux solutions distinctes :

$\boldsymbol{x + 1 = 0}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{x - 5 = 0}$	$\boldsymbol{+5}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = -1}$		$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = 5}$	

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{-1}\,;\boldsymbol{5}\}$

Question C

L'expression $x^3 - 4x^2 - 12x$ peut se factoriser, à l'aide de la mise en évidence en $x(x^2 - 4x - 12)$ qui peut elle-même se factoriser encore, à l'aide de la quatrième identité remarquable, en $x(x+2)(x-6)$

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $x(x+2)(x-6)$est égale à 0 si :

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x + 2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x - 6 = 0$$

Ainsi, notre équation initiale possède deux solutions distinctes :

$$x = 0 \quad \bigg|$$

$$\begin{aligned} & x + 2 = 0 \quad && \big| -2 \\ \Leftrightarrow\ & x = -2 && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - 6 = 0 \quad && \big| +6 \\ \Leftrightarrow\ & x = 6 && \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \{-2\,; 0\,; 6\}$

Question D

L'expression $x(x-2) + 3(x-2)$ peut se factoriser, à l'aide de la mise en évidence en $(x-2)(x+3)$.

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $(x-2)(x+3)$ est égale à 0 si :

$$x - 2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x + 3 = 0$$

Ainsi, notre équation initiale possède deux solutions distinctes :

$$\begin{aligned} & x - 2 = 0 \quad && \big| +2 \\ \Leftrightarrow\ & x = 2 && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 3 = 0 \quad && \big| -3 \\ \Leftrightarrow\ & x = -3 && \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \{-3\,; 2\}$

Exercice 3

Question A

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$6x^2 + 7x - 3 = 0$$

Avec $a = 6$, $b = 7$ et $c = -3$, le discriminant est égal à $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 121$

Puisque cette valeur est positive, notre équation initiale a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{121}}{2 \cdot 6} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{-7 - \sqrt{121}}{2 \cdot 6} = -\frac{3}{2}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \left\{-\frac{3}{2} ; \frac{1}{3}\right\}$

Question B

L'expression $x^2 + 14x + 49$ peut se factoriser, à l'aide de la quatrième identité remarquable en $(x + 7)(x + 7)$, expression équivalente à $(x + 7)^2$.

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $(x + 7)(x + 7)$ est égale à 0 si :

$$x + 7 = 0$$

Puisque les deux facteurs composant notre expression sont identiques et fournissent ainsi une même solution. Nous avons ainsi que :

$$\begin{aligned} & x + 7 = 0 && \Big| \; -7 \\ \Leftrightarrow \; & x = -7 && \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \{-7\}$

Question C

L'expression $\boldsymbol{x^2-36}$ peut se factoriser, à l'aide des identités remarquables en $\boldsymbol{(x+6)(x-6)}$.

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $\boldsymbol{(x+6)(x-6)}$ est égale à 0 si

$$\boldsymbol{x+6=0} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{x-6=0}$$

Ainsi, notre équation initiale possède deux solutions distinctes :

$$\begin{array}{rl|l} & \boldsymbol{x+6=0} & \color{red}{\boldsymbol{-6}} \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{x=-6} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl|l} & \boldsymbol{x-6=0} & \color{red}{\boldsymbol{+6}} \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{x=6} & \end{array}$$

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S=\{-6\,;6\}}$

Question D

L'équation $\boldsymbol{4x^2+1=4x}$ est équivalente à $\boldsymbol{4x^2-4x+1.}$

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$\boldsymbol{4x^2-4x+1=0}$$

Avec $\boldsymbol{a=4}$, $\boldsymbol{b=-4}$ et $\boldsymbol{c=1}$, le discriminant est égal à $\Delta = \boldsymbol{(-4)^2-4\cdot 4\cdot 1=0}$

Puisque cette valeur est nulle, notre équation initiale a une seule solution :

$$\boldsymbol{x_1=\frac{-(-4)}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}}$$

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S=\left\{\frac{1}{2}\right\}}$

Exercice 4

Question A

L'équation $\mathbf{3x^2 = 2(2x-1)}$ est équivalente à $\mathbf{3x^2 = 4x - 2}$ qui est elle-même équivalente à $\mathbf{3x^2 - 4x + 2 = 0}$

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$\mathbf{3x^2 - 4x + 2 = 0}$$

Avec $\boldsymbol{a = 3}$, $\boldsymbol{b = -4}$ et $\boldsymbol{c = 2}$, le discriminant est égal à $\Delta = \mathbf{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8}$

Puisque cette valeur est négative, notre équation initiale n'a pas de solution réelle.

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S} = \emptyset$

Question B

L'expression $\boldsymbol{x^2(x-4) + (13x+12)(x-4)}$ peut se factoriser, à l'aide de la mise en évidence en $\boldsymbol{(x-4)(x^2+13x+12)}$ qui peut, elle-même, se factoriser à l'aide de la quatrième identité remarquable en $\boldsymbol{(x-4)(x+1)(x+12)}$

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $\boldsymbol{x(x+2)(x-6)}$est égale à 0 si :

$$\boldsymbol{x - 4 = 0} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{x + 1 = 0} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{x + 12 = 0}$$

Ainsi, notre équation initiale possède deux solutions distinctes :

$\boldsymbol{x - 4 = 0} \quad \Big\vert \; +4$	$\boldsymbol{x + 1 = 0} \quad \Big\vert \; -1$	$\boldsymbol{x + 12 = 0} \quad \Big\vert \; -12$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = 4}$	$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = -1}$	$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = -12}$

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{-12\,;-1\,;4}\}$

Question C

L'équation $\frac{9}{4}\boldsymbol{x^2 - 3x + 1 = 0}$ est équivalente à $\boldsymbol{9x^2 - 12x + 4 = 0}$ **,** où chaque terme a été multiplié par 4.

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$\boldsymbol{9x^2 - 12x + 4 = 0}$$

Avec $\boldsymbol{a} = \mathbf{9}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{-12}$ et $\boldsymbol{c} = \mathbf{4}$, le discriminant est égal à $\Delta = (\mathbf{-12})^{\mathbf{2}} - \mathbf{4} \cdot \mathbf{9} \cdot \mathbf{4} = \mathbf{0}$

Puisque cette valeur est nulle, notre équation initiale a une seule solution :

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\mathbf{-(-12)}}{\mathbf{2 \cdot 9}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right\}$

Question D

L'équation $\frac{\boldsymbol{x(x-1)}}{\mathbf{4}} = \mathbf{3}$ peut s'écrire comme $\frac{\boldsymbol{x^2 - x}}{\mathbf{4}} = \mathbf{3}$ et est équivalente à $\boldsymbol{x^2 - x = 12}$**,** où chaque terme a été multiplié par 4.

Nous pouvons exprimer cette équation sous la forme $\boldsymbol{x^2 - x - 12 = 0}$ et factoriser l'expression se situant à gauche du signe de l'égalité, à l'aide de la quatrième identité remarquable. Nous obtenons l'équation $\boldsymbol{(x+3)(x-4) = 0}$

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $\boldsymbol{(x+3)(x-4)}$ est égale à 0 si :

$\boldsymbol{x + 3 = 0}$ ou $\boldsymbol{x - 4 = 0}$

Ainsi, notre équation initiale possède deux solutions distinctes :

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{x + 3 = 0} && \quad \color{red}{\mathbf{-3}} \\ \Leftrightarrow \ & \boldsymbol{x = -3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} & \boldsymbol{x - 4 = 0} && \quad \color{red}{\mathbf{+4}} \\ \Leftrightarrow \ & \boldsymbol{x = 4} \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{-3}\,;\mathbf{4}\}$