

Fiche théorique : La formule de Viète

Exemples

Prenons les équations suivantes :

$$x^2 + 92x - 3968 = 0$$

$$6x^2 + 5x - 4 = 0$$

Nous pouvons remarquer que les méthodes de résolution étudiées jusqu'à présent ne semblent pas être adaptées pour résoudre de telles équations.

Pour la première équation, nous pourrions être tenté de factoriser l'expression à gauche du signe à l'aide de la quatrième identité remarquable. Néanmoins, cette méthode nécessite la recherche de deux valeurs **a** et **b** tels que **a · b = -3968** et **a + b = 92** et cette tâche ne semble pas simple à exécuter.

Pour la seconde équation, le coefficient **6** se situant devant le **x²** complique la recherche d'une éventuelle factorisation de l'expression **6x² + 5x - 4**.

Un politicien français et mathématicien « amateur », né en 1540 et nommé François Viète, trouva une formule remarquable permettant de déterminer les solutions éventuelles d'une équation du deuxième degré de tous types. Décrivons cette formule.

La formule de Viète

Soit une équation du deuxième degré de la forme **ax² + bx + c = 0** avec **a ≠ 0**.

La première étape consiste à calculer le discriminant du polynôme **ax² + bx + c** et défini, selon Viète, par :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

En fonction du résultat du discriminant Δ , trois cas de figure se présentent :

- 1) Si Δ est négatif, alors notre équation n'a pas de solution réelle. Ainsi :

$$S = \emptyset$$

- 2) Si Δ est positif, alors notre équation a deux solutions réelles distinctes. L'ensemble des solutions est donné par :

$$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} ; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \right\}$$

- 3) Si Δ est nul, alors notre équation a une seule solution réelle. L'ensemble de solution est donné par :

$$S = \left\{ \frac{-b}{2 \cdot a} \right\}$$

Exemples

Appliquons cette formule sur les équations précédentes.

$$x^2 + 92x - 3968 = 0$$

$$6x^2 + 5x - 4 = 0$$

Pour la première équation, nous pouvons identifier les coefficients **a**, **b** et **c** :

$$a = 1$$

$$b = 92$$

$$c = -3968$$

Ainsi, le calcul du discriminant donne le résultat suivant :

$$\Delta = 92^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3968) = 24'336$$

Cette valeur étant positive, notre équation a deux solutions réelles distinctes données par :

$$S = \left\{ \frac{-92 - \sqrt{24'336}}{2 \cdot 1} ; \frac{-92 + \sqrt{24'336}}{2 \cdot 1} \right\}$$

D'où :

$$S = \{-124 ; 32\}$$

Pour la seconde équation, nous pouvons identifier les coefficients **a**, **b** et **c** :

$$a = 6$$

$$b = 5$$

$$c = -4$$

Ainsi, le calcul du discriminant donne le résultat suivant :

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-4) = 121$$

Cette valeur étant positive, notre équation a deux solutions réelles distinctes données par :

$$S = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{121}}{2 \cdot 6} ; \frac{-5 + \sqrt{121}}{2 \cdot 6} \right\}$$

D'où :

$$S = \left\{ -\frac{4}{3} ; \frac{1}{2} \right\}$$