

Les corrections détaillées :

Exercice 1

Question A

La réponse est 3, car $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

Question B

La réponse est -4, car $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

Question C

Nous pouvons utiliser la première propriété sur les logarithmes et obtenir l'expression suivante :

$$\log(25) + \log(4) = \log(25 \cdot 4) = \log(100)$$

La réponse est donc 2, car $10^2 = 100$

Question D

Nous pouvons utiliser la deuxième propriété sur les logarithmes et obtenir l'expression suivante :

$$\log_3(108) - \log_3(4) = \log_3\left(\frac{108}{4}\right) = \log_3(27)$$

La réponse est donc 3, car $3^3 = 27$

Question E

Nous pouvons utiliser la troisième propriété sur les logarithmes et obtenir l'expression suivante :

$$\log_2(8^5) = 5 \cdot \log_2(8)$$

Sachant que $\log_2(8)$ est égal à 3, car $2^3 = 8$, la réponse est 15.

Question F

Nous pouvons utiliser la troisième propriété sur les logarithmes et obtenir l'expression suivante :

$$\log_3(81^3) + \log_3(27^2) = 3 \cdot \log_3(81) + 2 \cdot \log_3(27)$$

Sachant que $\log_3(81)$ est égal à 4, car $3^4 = 81$, et que $\log_3(27)$ est égal à 3, car $3^3 = 27$, la réponse est 18.

Exercice 2

Question A

$$16^x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{16}(4)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Question B

$$9^x + 2 = 245$$

-2

$$\Leftrightarrow 9^x = 243$$

$$\Leftrightarrow x = \log_9(243)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

Question C

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4^x - 2}{3} + 4 \right) = 7$$

· 2

$$\Leftrightarrow \frac{4^x - 2}{3} + 4 = 14$$

-4

$$\Leftrightarrow \frac{4^x - 2}{3} = 10$$

· 3

$$\Leftrightarrow 4^x - 2 = 30$$

+2

$$\Leftrightarrow 4^x = 32$$

$$\Leftrightarrow x = \log_4(32)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

Question D

$$\begin{aligned} & \frac{(2+6)^x + 4}{3} - 1 = 11 \\ \Leftrightarrow & \frac{8^x + 4}{3} - 1 = 11 & +1 \\ \Leftrightarrow & \frac{8^x + 4}{3} = 12 & \cdot 3 \\ \Leftrightarrow & 8^x + 4 = 36 & -4 \\ \Leftrightarrow & 8^x = 32 \\ \Leftrightarrow & x = \log_8(32) \\ \Leftrightarrow & x = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

Exercice 3

Question A

$$\begin{aligned} \log_2(5x - 7) &= 7 \\ \Leftrightarrow 2^7 &= 5x - 7 \\ \Leftrightarrow 128 &= 5x - 7 && +7 \\ \Leftrightarrow 135 &= 5x && :5 \\ \Leftrightarrow 27 &= x \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \{27\}$

Question B

$$\begin{aligned} \log(3x + 4) &= 2 \\ \Leftrightarrow 10^2 &= 3x + 4 \\ \Leftrightarrow 100 &= 3x + 4 && -4 \\ \Leftrightarrow 96 &= 3x && :3 \\ \Leftrightarrow 32 &= x \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \{32\}$

Attention, pour chaque équation, il est impératif de vérifier que ces valeurs définissent vos logarithmes initiaux, afin de valider définitivement vos solutions.

Question C

$$\log_3(2x - 3) = -1$$

$$\Leftrightarrow 3^{-1} = 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3^1} = 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{6x}{3} - \frac{9}{3} \quad \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow 1 = 6x - 9 \quad +9$$

$$\Leftrightarrow 10 = 6x \quad :6$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{6} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} = x$$

Nous pouvons en conclure que $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

Question D

$$\log_5(4x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5^0 = 4x - 1 \quad +1$$

$$\Leftrightarrow 2 = 4x \quad :4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{4} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = x$$

Nous pouvons en conclure que $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Attention, pour chaque équation, il est impératif de vérifier que ces valeurs définissent vos logarithmes initiaux, afin de valider définitivement vos solutions.

Exercice 4

Question A

$$\begin{aligned} \log_2(3x - 1) - \log_2(5) &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{3x - 1}{5}\right) &= 2 \\ \Leftrightarrow 2^2 &= \frac{3x - 1}{5} \\ \Leftrightarrow 4 &= \frac{3x - 1}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{20}{5} &= \frac{3x - 1}{5} && \cdot 5 \\ \Leftrightarrow 20 &= 3x - 1 && +1 \\ \Leftrightarrow 21 &= 3x && :3 \\ \Leftrightarrow 7 &= x \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \{7\}$

Question B

$$\begin{aligned} \log_3(2x + 3) + \log_3(2) &= 5 \\ \Leftrightarrow \log_3[(2x + 3) \cdot 2] &= 5 \\ \Leftrightarrow \log_3(4x + 6) &= 5 \\ \Leftrightarrow 3^5 &= 4x + 6 \\ \Leftrightarrow 243 &= 4x + 6 && -6 \\ \Leftrightarrow 237 &= 4x && :4 \\ \Leftrightarrow \frac{237}{4} &= x \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \left\{\frac{237}{4}\right\}$

Attention, pour chaque équation, il est impératif de vérifier que ces valeurs définissent vos logarithmes initiaux, afin de valider définitivement vos solutions.

Exercice 5

Question A

$$\log_2(x+3) + \log_2(5-x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(x+3)(5-x)] = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_2[5x - x^2 + 15 - 3x] = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_2[-x^2 + 2x + 15] = 4$$

$$\Leftrightarrow 2^4 = -x^2 + 2x + 15$$

$$\Leftrightarrow 16 = -x^2 + 2x + 15$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

L'expression $x^2 - 2x + 1$ peut se factoriser, à l'aide des identités remarquables en $(x-1)(x-1)$.

Le théorème du produit nul stipule que l'expression $(x-1)(x-1)$ est égale à 0 si

$$x - 1 = 0$$

Nous pouvons en conclure que $S = \{1\}$

Attention, il est impératif de vérifier que cette valeur définisse vos logarithmes initiaux, afin de valider définitivement votre solution.

Question B

$$\begin{aligned} & \log_3(8x + 1) - \log_3(x - 1) = 2 \\ \Leftrightarrow & \log_3\left(\frac{8x + 1}{x - 1}\right) = 2 \\ \Leftrightarrow & 3^2 = \frac{8x + 1}{x - 1} \\ \Leftrightarrow & 9 = \frac{8x + 1}{x - 1} \quad \cdot (x - 1) \\ \Leftrightarrow & 9(x - 1) = 8x + 1 \\ \Leftrightarrow & 9x - 9 = 8x + 1 \quad +9 \\ \Leftrightarrow & 9x = 8x + 10 \quad -8x \\ \Leftrightarrow & x = 10 \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que $S = \{1\}$

Attention, il est impératif de vérifier que cette valeur définisse vos logarithmes initiaux, afin de valider définitivement votre solution.

Question C

$$\log_5(4x + 1) + \log_5(x - 6) = 5$$

$$\Leftrightarrow \log_5[(4x + 1)(x - 6)] = 5$$

$$\Leftrightarrow \log_5[4x^2 - 24x + x - 6] = 5$$

$$\Leftrightarrow \log_5[4x^2 - 23x - 6] = 5$$

$$\Leftrightarrow 5^5 = 4x^2 - 23x - 6$$

$$\Leftrightarrow 3125 = 4x^2 - 23x - 6$$

$$\Leftrightarrow 0 = 4x^2 - 23x - 3131$$

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$0 = 4x^2 - 23x - 3131$$

Avec $a = 4$, $b = -23$ et $c = -3131$, le discriminant est égal à

$$\Delta = (-23)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3131) = 50625$$

Puisque cette valeur est positive, notre équation initiale a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-23) + \sqrt{50625}}{2 \cdot 4} = 31 \quad x_2 = \frac{-(-23) - \sqrt{50625}}{2 \cdot 4} = -\frac{101}{4}$$

La solution potentielle $-\frac{101}{4}$ ne définit pas les logarithmes de notre équation initiale. Cette valeur ne peut ainsi pas être prise en considération comme une solution de notre équation de base.

Nous pouvons en conclure que $S = \{31\}$

Question D

$$\log_2(3x + 1) = \log_2(5x + 3) - 1$$

$$\log_2(3x + 1) - \log_2(5x + 3) = -1$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{3x + 1}{5x + 3}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2^{-1} = \frac{3x + 1}{5x + 3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^1} = \frac{3x + 1}{5x + 3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3x + 1}{5x + 3} \quad \cdot (5x + 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(5x + 3) = 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{2} + \frac{3}{2} = 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{6x}{2} + \frac{2}{2} \quad \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 5x + 3 = 6x + 2 \quad -5x$$

$$\Leftrightarrow 3 = x + 2 \quad -2$$

$$\Leftrightarrow 1 = x$$

Nous pouvons en conclure que $S = \{1\}$

Attention, il est impératif de vérifier que cette valeur définisse vos logarithmes initiaux, afin de valider définitivement votre solution.

Exercice 6

Nous pouvons noter P_1 la valeur de la voiture après une année. Alors :

$$P_1 = 24500 \cdot \frac{3}{4}$$

De même, en notant P_2 le prix de la voiture après deux ans, nous avons que :

$$P_2 = P_1 \cdot \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad P_2 = 24500 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad P_2 = 24500 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

En utilisant un raisonnement similaire, et en notant P_3 la valeur de la voiture après 3 ans, nous avons que :

$$P_3 = P_2 \cdot \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad P_3 = 24500 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad P_3 = 24500 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

Par une méthode récurrente, nous pouvons en déduire que le prix après 10 ans, noté P_{10} , peut être calculé à l'aide de l'expression suivante :

$$P_{10} = 24500 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

Nous pouvons en conclure que le prix de vente est de CHF 1379.70 environ.

Exercice 7

Nous pouvons noter C_1 la valeur du capital après une année. Alors :

$$C_1 = 24900 \cdot 1,005$$

De même, en notant C_2 le prix de la voiture après deux ans, nous avons que :

$$C_2 = C_1 \cdot 1,005 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = 24900 \cdot 1,005 \cdot 1,005 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = 24900 \cdot 1,005^2$$

Par une méthode récurrente, similaire à celle que nous avons menée pour résoudre l'exercice 6, nous pouvons en déduire la formule suivante pour calculer simplement la valeur du capital après x années :

$$C(x) = 24900 \cdot 1,005^x$$

Ainsi, pour résoudre à la question posée, nous devons trouver la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} 25656,40 &= 24900 \cdot 1,005^x && : 24900 \\ \Leftrightarrow 1,03037751 &= 1,005^x \\ \Leftrightarrow x &= \log_{1,005}(1,03037751) \\ \Leftrightarrow x &\cong 6 \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que la durée est de 6 ans.