

Les corrections détaillées :

Exercice 1

Pour calculer l'image de -2 par la fonction f , nous devons calculer l'expression $f(-2)$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 4 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que l'image de -2 par la fonction f est égale à -6 .

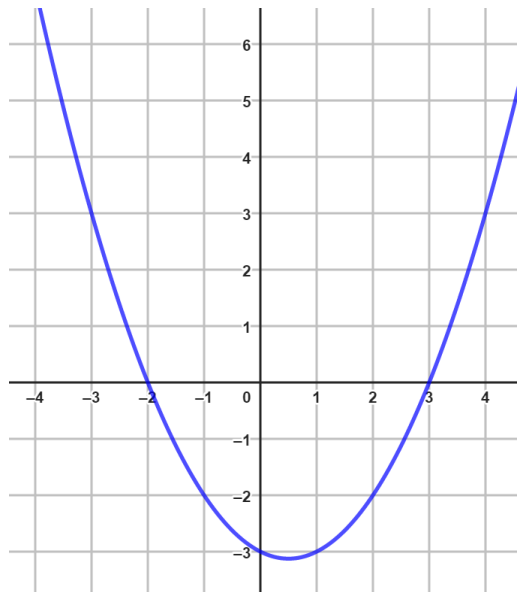
Exercice 2

Pour déterminer la préimage de 2 par la fonction f , nous devons résoudre l'équation $f(x) = 2$:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 10 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 4)(x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que les préimages de 2 par la fonction f sont -4 et 3 .

Exercice 3



A) Les préimages de 3 sont -3 et 4 .

B) L'image de -2 est égale à 0 .

Exercice 4

Pour déterminer la préimage de $-\frac{1}{6}$ par la fonction f , nous devons résoudre l'équation $f(x) = -\frac{1}{6}$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{3} + \frac{x}{4} - 1 &= -\frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{4x^2}{12} + \frac{3x}{12} - \frac{12}{12} &= -\frac{2}{12} && \cdot 12 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 12 &= -2 && +2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 10 &= 0 \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$4x^2 + 3x - 10 = 0$$

Avec $a = 4$, $b = 3$ et $c = -10$, le discriminant est égal à $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-10) = 169$

Puisque cette valeur est positive, notre équation initiale a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{169}}{2 \cdot 4} = \frac{5}{4} \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{169}}{2 \cdot 4} = -2$$

Nous pouvons en conclure que les préimages de $-\frac{1}{6}$ par la fonction f sont -2 et $\frac{5}{4}$.

Exercice 5

Question A

Pour déterminer les zéros de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = x^2 + 9x + 14$, nous devons résoudre l'équation $f_1(x) = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + 9x + 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)(x + 7) &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons en conclure que les zéros de la fonction f_1 sont -7 et -2 .

Question B

Pour déterminer les zéros de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = (2x + 1)(x - 3)$, nous devons résoudre l'équation $f_2(x) = 0$:

$$(2x + 1)(x - 3) = 0$$

Ainsi, notre équation possède deux solutions distinctes :

$2x + 1 = 0$	-1	$x - 3 = 0$	$+3$
$\Leftrightarrow 2x = -1$	$:2$	$\Leftrightarrow x = 3$	
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$			

Nous pouvons en conclure que les zéros de la fonction f_2 sont $-\frac{1}{2}$ et 3 .

Question C

Pour déterminer les zéros de la fonction f_3 définie par $f_3(x) = 9x^2 - 6x + 1$, nous devons résoudre l'équation $f_3(x) = 0$:

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

Avec $a = 9$, $b = -6$ et $c = 1$, le discriminant est égal à $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$

Puisque cette valeur est nulle, notre équation a une unique solution :

$$x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}$$

Nous pouvons en conclure que les zéros de la fonction f_3 sont $\frac{1}{3}$.

Question D

Pour déterminer les zéros de la fonction f_4 définie par $f_4(x) = 4x^2 - 5x + 3$, nous devons résoudre l'équation $f_4(x) = 0$:

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$4x^2 - 5x + 3 = 0$$

Avec $a = 4$, $b = -5$ et $c = 3$, le discriminant est égal à $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -23$

Puisque cette valeur est négative, notre équation n'a pas de solution réelle et notre fonction n'a, par conséquent, pas de zéro.

Exercice 6

Question A

Pour déterminer le sommet S de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = x^2 + 9x + 14$, nous pouvons calculer son abscisse à l'aide de la formule suivante :

$$x_S = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Nous obtenons :

$$x_S = \frac{-9}{2 \cdot 1} = -\frac{9}{2}$$

L'ordonnée du sommet peut être déterminée en calculant l'image de $-\frac{9}{2}$ par la fonction f_1 :

$$y_S = \left(-\frac{9}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) + 14 = -\frac{25}{4}$$

Nous pouvons en conclure que le sommet de la fonction f_1 est le point $S = \left(-\frac{9}{2} ; -\frac{25}{4}\right)$.

Question B

La fonction f_2 définie par $f_2(x) = (2x + 1)(x - 3)$ est équivalente à $f_2(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

Nous pouvons calculer l'abscisse du sommet à l'aide de la formule :

$$x_S = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Nous obtenons :

$$x_S = \frac{-(-5)}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$$

L'ordonnée du sommet peut être déterminée en calculant l'image de $\frac{5}{4}$ par la fonction f_2 :

$$y_S = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} - 3 = -\frac{49}{8}$$

Nous pouvons en conclure que le sommet de la fonction f_1 est le point $S = \left(\frac{5}{4} ; -\frac{49}{8}\right)$.

Question C

Pour déterminer le sommet S de la fonction f_3 définie par $f_3(x) = 9x^2 - 6x + 1$, nous pouvons calculer son abscisse à l'aide de la formule suivante :

$$x_s = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Nous obtenons :

$$x_s = \frac{-(-6)}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}$$

L'ordonnée du sommet peut être déterminée en calculant l'image de $\frac{1}{3}$ par la fonction f_3 :

$$y_s = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 0$$

Nous pouvons en conclure que le sommet de la fonction f_3 est le point $S = \left(\frac{1}{3} ; 0\right)$.

Question D

Pour déterminer le sommet S de la fonction f_4 définie par $f_4(x) = 4x^2 - 5x + 3$, nous pouvons calculer son abscisse à l'aide de la formule suivante :

$$x_s = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Nous obtenons :

$$x_s = \frac{-(-5)}{2 \cdot 4} = \frac{5}{8}$$

L'ordonnée du sommet peut être déterminée en calculant l'image de $\frac{5}{8}$ par la fonction f_4 :

$$y_s = 4 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{8} + 3 = \frac{23}{16}$$

Nous pouvons en conclure que le sommet de la fonction f_4 est le point $S = \left(\frac{5}{8} ; \frac{23}{16}\right)$.

Exercice 7

Pour déterminer le point d'intersection entre deux paraboles, il est nécessaire de résoudre le système d'équations composés des équations des deux paraboles :

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x - 5 \\ y = -2x^2 + x + 3 \end{cases}$$

Par substitution, en remplaçant la variable y de la seconde équation par $x^2 + 3x - 5$, nous obtenons une équation à une inconnue :

$$x^2 + 3x - 5 = -2x^2 + x + 3$$

Nous pouvons également obtenir une équation équivalente en rassemblant tous les éléments sur la gauche du signe de l'égalité. Nous obtenons :

$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$

En utilisant la formule de Viète avec $a = 3$, $b = 2$ et $c = -8$, nous pouvons en déduire que le discriminant est égal à $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 100$

Puisque cette valeur est positive, notre équation initiale a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{4}{3} \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = -2$$

Attention, les abscisses des points d'intersection ont été calculés. Il est impératif de calculer les images par l'une de deux fonctions, de chacune de ces abscisses, pour y obtenir les ordonnées correspondantes :

- Si $x = \frac{4}{3}$ alors $y = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4}{3} - 5 = \frac{7}{9}$
- Si $x = -2$ alors $y = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 5 = -7$

Nous pouvons en conclure que les points d'intersection sont $\left(\frac{4}{3} ; \frac{7}{9}\right)$ et $(-2 ; -7)$.

Exercice 8

Question A

Pour déterminer la préimage de 6 par la fonction f , nous devons résoudre l'équation $f(x) = 6$:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 9x - 4 &= 6 \\ \Leftrightarrow -2x^2 + 9x - 10 &= 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} -6 \end{array} \right.$$

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$-2x^2 + 9x - 10 = 0$$

Avec $a = -2$, $b = 9$ et $c = -10$, le discriminant est égal à $\Delta = 9^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-10) = 1$

Puisque cette valeur est positive, notre équation initiale a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{1}}{2 \cdot (-2)} = 2 \qquad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{5}{2}$$

Nous pouvons en conclure que les préimages de 6 par la fonction f sont 2 et $\frac{5}{2}$.

Question B

La parabole représentant graphiquement la fonction f coupe l'axe des abscisses aux zéros de la fonction f . Nous devons ainsi résoudre l'équation $f(x) = 0$ pour trouver les points d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses :

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$-2x^2 + 9x - 4 = 0$$

Avec $a = -2$, $b = 9$ et $c = -4$, le discriminant est égal à $\Delta = 9^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = 49$

Puisque cette valeur est positive, notre équation initiale a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{49}}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{49}}{2 \cdot (-2)} = 4$$

Nous pouvons en conclure que la parabole coupe l'axe des abscisses aux points $(\frac{1}{2}; 0)$ et $(4; 0)$.

Question C

Pour calculer $f(-3)$ nous devons évaluer notre fonction en $x = 3$:

$$\begin{aligned} f(-3) &= -2 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) - 4 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Question D

Pour déterminer la valeur du paramètre m sachant que le point $(m - 1 ; 2m)$ se situe sur la parabole, nous pouvons substituer x par $m + 1$ et $f(x)$ par $2m + 1$ dans l'expression fonctionnelle de notre fonction f :

$$\begin{aligned} 2m &= -2(m - 1)^2 + 9(m - 1) - 4 \\ \Leftrightarrow 2m &= -2(m^2 - 2m + 1) + 9(m - 1) - 4 \\ \Leftrightarrow 2m &= -2m^2 + 4m - 2 + 9m - 9 - 4 \\ \Leftrightarrow 2m &= -2m^2 + 13m - 15 \\ \Leftrightarrow 0 &= -2m^2 + 11m - 15 \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$-2m^2 + 11m - 15 = 0$$

Avec $a = -2$, $b = 11$ et $c = -15$, le discriminant est égal à $\Delta = 11^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-15) = 1$

Puisque cette valeur est positive, notre équation initiale a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-11 + \sqrt{1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{5}{2} \qquad x_2 = \frac{-11 - \sqrt{1}}{2 \cdot (-2)} = 3$$

Nous pouvons en conclure que la valeur du paramètre m peut être égale à $\frac{5}{2}$ ou 3 .

Exercice 9

Nous recherchons l'équation d'une parabole de la forme $y = ax^2 + bx + c$

Pour déterminer les valeurs de a , b et c nous avons besoin de trois informations.

Information n°1

La parabole passe par le point $(0; -2)$. Nous pouvons en déduire la valeur de l'ordonnée à l'origine et en conclure que $c = -2$.

L'équation de notre parabole recherchée est ainsi de la forme $y = ax^2 + bx - 2$

Nous devons trouver deux autres informations pour déterminer les valeurs de a et b .

Information n°2

La parabole passe par le point $(2; 6)$. Ainsi, lorsque la variable x prend la valeur 2, la variable y est égale à 6. En substituant ces variables pour les valeurs indiquées dans l'équation de notre parabole, nous obtenons une équation à deux inconnues de la forme :

$$6 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 2$$

Information n°3

Un raisonnement similaire nous permet de trouver une autre équation. En effet, notre parabole passe également par le point $(-4; -6)$. Ainsi, lorsque la variable x prend la valeur -4 , la variable y est égale à -6 . Nous obtenons ainsi une équation de la forme :

$$-6 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) - 2$$

Pour déterminer les valeurs de a et b , nous devons ainsi résoudre le système composé des deux équations précédentes que nous pouvons écrire sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{cases} 6 = 4a + 2b - 2 \\ -6 = 16a - 4b - 2 \end{cases}$$

Nous pouvons obtenir un système d'équations équivalent en multipliant la première équation par **4**. Nous avons ainsi un nombre équivalent de **a** sur les deux équations qui composent notre système :

$$\begin{cases} \mathbf{24 = 16a + 8b - 8} \\ -6 = 16a - 4b - 2 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde équation de la première, nous obtenons :

$$\begin{array}{r} 24 = 16a + 8b - 8 \\ -6 = 16a - 4b - 2 \\ \hline 30 = 0 \cdot a + 12b - 6 \end{array}$$

Or, si

$$\begin{array}{l} 30 = 12b - 6 \\ \Leftrightarrow 36 = 12b \\ \Leftrightarrow 3 = b \end{array} \quad \begin{array}{l} +6 \\ :12 \end{array}$$

Pour trouver la valeur de a , nous pouvons utiliser l'équation $6 = 4a + 2b - 2$ et remplacer la variable b par la valeur 3 :

$$\begin{array}{l} 6 = 4a + 2 \cdot 3 - 2 \\ \Leftrightarrow 6 = 4a + 4 \\ \Leftrightarrow 2 = 4a \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} = a \end{array} \quad \begin{array}{l} -4 \\ :4 \end{array}$$

Ainsi, l'équation de la parabole recherchée est : $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$

Exercice 10

Question A

L'impact avec le sol aura lieu lorsque $H(x) = 0$. Nous devons ainsi résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{12}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{1}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{12}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{6}{12} = \frac{0}{12} && \cdot 12 \\ \Leftrightarrow & -x^2 + 5x + 6 = 0 && \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 5x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 6)(x + 1) = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation ci-dessus sont -1 et 6 . Néanmoins, la variable x représente une distance. Par conséquent, nous devons prendre uniquement en considération la solution positive, seule à être cohérente avec la réalité du problème.

Question B

Pour déterminer la hauteur de la boule de pétanque au départ du tir, nous devons évaluer la fonction H en $x = 0$:

$$\begin{aligned} H(0) &= -\frac{1}{12} \cdot 0^2 + \frac{5}{12} \cdot 0 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La hauteur de la boule au départ du tir est de 0.5 mètres.

Exercice 11

Question A

Pour déterminer le prix de vente permettant de réaliser un bénéfice de CHF 50'000, nous devons résoudre l'équation $B(x) = 50'000$:

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$-20x^2 + 9150x - 971'250 = 50'000$$

équivalente à

$$-20x^2 + 9150x - 1'021'250 = 0$$

Avec $a = -20$, $b = 9150$ et $c = -1'021'250$, le discriminant est égal à $\Delta = 2'022'500$

Puisque cette valeur est positive, notre équation initiale a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-9150 + \sqrt{2'022'500}}{2 \cdot (-20)} \cong 193,20 \qquad x_2 = \frac{-9150 - \sqrt{2'022'500}}{2 \cdot (-20)} \cong 264,30$$

Un prix de vente situé entre CHF 193,20 et CHF 264,30 doit être fixé.

Question B

Pour déterminer le bénéfice maximal réalisé, nous devons calculer le sommet de la parabole représentant graphiquement la fonction $B(x) = -20x^2 + 9150x - 971'250$:

L'abscisse est donnée par :

$$p_{Bmax} = \frac{-9150}{2 \cdot (-20)} = 228,75$$

Pour déterminer l'ordonnée du sommet, nous indiquant le bénéfice maximal réalisé, nous devons calculer l'image de **228,75** par la fonction B :

$$B(228,75) = -20 \cdot 228,75^2 + 9150 \cdot 228,75 - 971'250 = 75281,25$$

En fixant un prix de vente à l'unité de CHF 228,75, un bénéfice maximal de CHF 75'281,25 peut être réalisé.

Exercice 12

Question A

Le bénéfice réalisé par l'entreprise grâce à la vente de ces trottinettes correspond à la différence entre les revenus générés et les coûts dépensés par l'entreprise pour la commercialisation de cet objet. Ainsi :

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

En utilisant les fonctions données, nous avons que :

$$\begin{aligned} B(x) &= -25x^2 + 9500x - (-2375x + 937500) \\ &= -25x^2 + 9500x + 2375x - 937500 \\ &= -25x^2 + 11'875x - 937500 \end{aligned}$$

Le résultat obtenu correspond bien à la fonction à déterminer, soit la fonction :

$$B(x) = -25x^2 + 11'875x - 937500$$

Question B

Pour déterminer le prix de vente permettant d'éviter une perte, nous devons résoudre l'équation $B(x) = 0$:

L'utilisation de la formule de Viète semble appropriée pour résoudre l'équation

$$-25x^2 + 11'875x - 937500 = 0$$

Avec $a = -25$, $b = 11'875$ et $c = -937'500$, le discriminant est égal à $\Delta = 47'265'625$

Puisque cette valeur est positive, notre équation initiale a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-11'875 + \sqrt{47'265'625}}{2 \cdot (-25)} = 100 \qquad x_2 = \frac{-11'875 - \sqrt{47'265'625}}{2 \cdot (-25)} = 375$$

Un prix de vente situé entre CHF 100 et CHF 375 doit être fixé.