

Fiche théorique : Les inéquations (Partie 1)

Définition

Une inéquation est une inégalité entre deux expressions algébriques et incluant une ou plusieurs variables.

Remarque

Un nombre est une solution d'une inéquation à une variable, si en remplaçant la variable par ce nombre, l'inégalité est satisfaite. En règle générale, l'ensemble des solutions d'une inéquation est donné sous la forme d'un intervalle.

Exemples

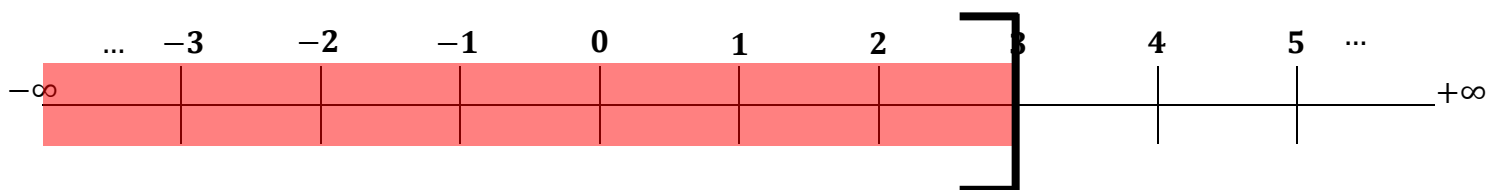
- $x + 4 \leq 0$ est une inéquation du 1er degré avec une variable. Le nombre -5 est l'une des solutions de cette inéquation, puisqu'en remplaçant la variable x par cette valeur, l'inégalité est satisfaite.
- $2x - 4 > 5$ est une inéquation du 1er degré. Le nombre 3 n'est pas une solution de cette inéquation, puisqu'en remplaçant notre inconnue par cette valeur, l'égalité n'est pas satisfaite.

Les signes suivants sont utilisés pour comparer les deux expressions algébriques :

$<$	Strictement plus petit
$>$	Strictement plus grand
$\leq$	Plus petit ou égal
$\geq$	Plus grand ou égal

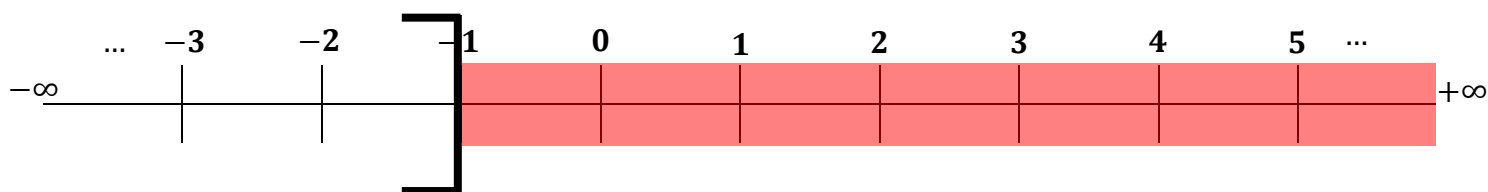
Prenons quelques exemples simples pour se familiariser avec ces nouvelles notions.

Intéressons-nous à l'inéquation $x \leq 3$ et schématisons, dans un premier temps, l'ensemble des valeurs respectant cette condition.



Nous noterons l'ensemble des solutions par un intervalle de la forme $S =]-\infty ; 3]$, le crochet fermé (tourné en direction du nombre 3), signifie que cette valeur peut être prise en considération et vérifie l'inégalité initiale.

Effectuons la même tâche avec l'inéquation $x > -1$ et hachurons, sur le schéma ci-dessous, l'ensemble des valeurs satisfaisant cette condition.



Nous noterons l'ensemble des solutions par un intervalle de la forme $S =]-1 ; +\infty[$, le crochet ouvert (tourné dans la direction opposée du nombre -1), signifie que cette valeur ne peut pas être prise en compte, cette valeur ne satisfaisant pas la condition initiale.

Remarques

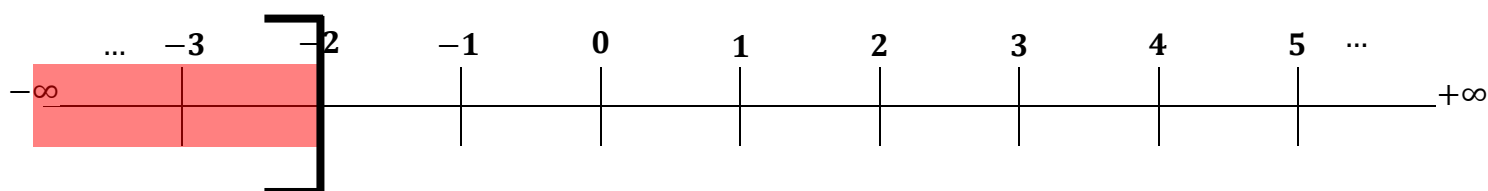
Le crochet est toujours ouvert lorsqu'il accompagne les bornes $-\infty$ et $+\infty$.

Exemple

Soit l'inéquation $-x \geq 2$

Cette inéquation n'est pas équivalente à $x \geq -2$. Cette affirmation peut être observée en remplaçant la variable x par des valeurs supérieures à -2 dans l'inéquation initiale.

En revanche, toutes les valeurs respectant la condition $x \leq -2$ vérifient l'équation de base.



Nous pouvons en conclure que $S =]-\infty ; -2]$

Définition

Une inéquation est équivalente à une autre inéquation, si nous passons de l'une à l'autre en additionnant ou soustrayant par un même nombre des deux côtés de l'inégalité.

Une inéquation est équivalente à une autre inéquation, si nous passons de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant par un même nombre positif des deux côtés de l'inégalité.

Une inéquation est équivalente à une autre inéquation, si nous passons de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant par un même nombre négalif des deux côtés de l'inégalité et **si nous inversons le signe de l'inégalité**.

Exemples

$$A) \quad 4x - 3 > x + 5$$

$$\Leftrightarrow 4x > x + 8$$

$$\Leftrightarrow 3x > 8$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{8}{3}$$

$$S = \left] \frac{8}{3} ; +\infty \right[$$

$$+3$$

$$-x$$

$$:3$$

$$B) \quad 2x - 3 \leq 5x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 5x + 2$$

$$\Leftrightarrow -3x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$$

$$S = \left[-\frac{2}{3} ; +\infty \right[$$

$$+3$$

$$-5x$$

$$: (-3)$$