

Fiche théorique : Les équations logarithmiques complexes

Exercice introductif

Parmi les assertions ci-dessous, lesquelles sont correctes ?

	Vrai	Faux
$\log_2(4) + \log_2(2) = \log_2(6)$		X
$\log_2(4) + \log_2(2) = \log_2(8)$	X	
$\log_3(27) - \log_3(9) = \log_3(18)$		X
$\log_3(27) - \log_3(9) = \log_3(3)$	X	
$\log_2(32) - \log_2(8) = \log_2(4)$	X	
$\log_2(32) - \log_2(8) = \log_2(24)$		X
$2 \cdot \log_2(4) = \log_2(8)$		X
$2 \cdot \log_2(4) = \log_2(4^2)$	X	

Remarques

Cet exercice introductif nous permet d'affirmer que trois règles, qui pourraient peut-être paraître logique, sont fausses.

$$\log_b(x) + \log_b(y) \neq \log_b(x + y)$$

$$\log_b(x) - \log_b(y) \neq \log_b(x - y)$$

$$n \cdot \log_b(x) \neq \log_b(n \cdot x) \quad , n \in \mathbb{R}$$

Nous pouvons néanmoins remarquer que les logarithmes semblent vérifier certaines propriétés.

$$\log_b(x) + \log_b(y) = \log_b(x \cdot y)$$

$$\log_b(x) - \log_b(y) = \log_b\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$n \cdot \log_b(x) = \log_b(x^n) \quad , n \in \mathbb{R}$$

L'utilisation de ces propriétés peut s'avérer utile et nécessaire pour résoudre certains types d'équations.

Prenons comme exemple l'équation $\log_2(x + 3) + \log_2(x - 1) = 5$.

Le fait que cette équation comporte deux logarithmes complexifie la résolution de cette équation. Néanmoins, l'utilisation de la première propriété des logarithmes nous permet de rassembler ces deux termes, afin d'obtenir une équation ne comptant qu'un seul logarithme.

$$\log_2(x + 3) + \log_2(x - 1) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2[(x + 3)(x - 1)] = 5$$

Nous pouvons utiliser la définition du logarithme sur l'équation obtenue.

Plus précisément,

$$\begin{aligned} & \log_2[(x + 3)(x - 1)] = 5 \\ \Leftrightarrow & \log_2(x^2 + 3x + x - 3) = 5 \\ \Leftrightarrow & \log_2(x^2 + 4x - 3) = 5 \\ \Leftrightarrow & 2^5 = x^2 + 4x - 3 \\ \Leftrightarrow & 32 = x^2 + 4x - 3 \\ \Leftrightarrow & 0 = x^2 + 4x - 35 \\ \Leftrightarrow & 0 = (x - 7)(x - 5) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \\ -32 \\ \end{array} \right.$$

Remarques

Nous rappelons qu'un logarithme de la forme $\log_b(a)$ est défini si $a > 0$. Il est ainsi essentiel de valider nos solutions potentielles en s'assurant que, avec de telles valeurs, nos logarithmes sont définis.

L'équation quadratique ci-dessous, représentée sous sa forme factorisée, possède deux solutions données par -7 et 5 .

Néanmoins, la valeur 5 est la seule à vérifier l'équation initiale, puisqu'en utilisant la valeur -7 , les deux logarithmes ne sont pas définis.

Ainsi, nous pouvons en conclure que l'ensemble de solution de notre équation est donné par :

$$S = \{5\}$$