Fiche théorique : La 4e identité remarquable

La 4e identité remarquable
Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux nombres réels quelconques. L'égalité suivante est vraie : $$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{ab}$$

<u>Preuve</u>

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

<u>Remarque</u>

L'expression $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$ est dite factorisée, alors que l'expression $\boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{ab}$ représente la forme développée.

<u>Exemples</u>

L'expression factorisée $(x+3)(x+4)$ est équivalente à l'expression développée de la forme $x^2+7x+12$.

L'expression factorisée $(x-2)(x+5)$ est équivalente à l'expression développée de la forme $x^2+3x-10$.

Développer une expression, à l'aide de la double distributivité par exemple, n'est pas un exercice qui présente de réelles difficultés.

A l'inverse, factoriser une expression du 2e degré peut représenter une tâche plus ardue. Tentons d'utiliser ainsi la 4e identité remarquable pour factoriser l'expression :

$$\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{8}\boldsymbol{x} + \mathbf{15}$$

En comparant celle-ci avec l'expression développée de la 4e identité remarquable définie par :

$$\boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{ab}$$

Nous observons que la 4e identité remarquable nous demande de déterminer deux nombres ***a*** et ***b*** tels que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \mathbf{8} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \mathbf{15} \end{cases}$$

En raisonnant par tâtonnement, nous pouvons déterminer les valeurs des coefficients ***a*** et ***b* :**

Nous pouvons en conclure que l'expression $\boldsymbol{x^2+8x+15}$ est équivalente à $\boldsymbol{(x+5)(x+3).}$

<u>Exemple</u>

Pour factoriser l'expression $\boldsymbol{x^2+9x+18}$, nous pouvons comparer celle-ci avec la forme développée de la 4e identité remarquable définie par $\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab.}$

Nous devons ainsi déterminer la valeurs des coefficients ***a*** et ***b*** respectant les conditions ci-dessous :

$$\begin{cases} \boldsymbol{a+b=} \\ \boldsymbol{a\cdot b=} \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire que l'expression développée $\boldsymbol{x^2+9x+18}$ est équivalente à l'expression factorisée ci-dessous :

A l'aide de cette factorisation, la résolution de l'équation $\boldsymbol{x^2+9x+18=0}$, par exemple, devient une tâche aisée.

$$\boldsymbol{x^2+9x+18=0}$$

Remarques

Les trois premières identités remarquables sont des cas particuliers de la quatrième identité remarquable.

Prenons l'expression $\boldsymbol{x^2+4x+4}$ qui se factorise, en utilisant la première identité remarquable, en $\boldsymbol{(x+2)^2}$.

Un résultat similaire peut être obtenu en utilisant la quatrième identité remarquable.

En effet, nous devons déterminer les valeurs des coefficients ***a*** et ***b*** telles que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{a+b=4} \\ \boldsymbol{a \cdot b = 4} \end{cases}$$

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{x^2+4x+4=}$

Prenons un second exemple avec l'expression $\boldsymbol{x^2-9}$ qui se factorise, par la troisième identité remarquable, en $\boldsymbol{(x+3)(x-3)}$. La quatrième identité remarquable permet d'obtenir le même résultat.

En effet, l'expression $\boldsymbol{x^2-9}$ est équivalente à $\boldsymbol{x^2+0x-9}$ et nous devons ainsi déterminer les valeurs des coefficients ***a*** et ***b*** telles que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{a+b=0} \\ \boldsymbol{a \cdot b = -9} \end{cases}$$

Nous pouvons en conclure que $\boldsymbol{x^2-9=}$